NÚMERO DE MEDICIONES NECESARIAS

Luis O. Becerra
Centro Nacional de Metrología, División de Metrología de Masa y Densidad
km 4,5 Carretera a los Cués, Mpio. El Marqués
Tel: (442) 2 11 05 00, Fax: (442) 2 15 39 04, e-mail: lbecerra@cenam.mx

Resumen: El número de mediciones (repeticiones) necesarias para realizar una medición es una decisión que el metrólogo debe tomar considerando la incertidumbre "objetivo", la aportación de la incertidumbre tipo A, el tiempo requerido para realizar repeticiones entre otras consideraciones.

El presente trabajo presenta una fórmula que puede ser utilizada para estimar el número de mediciones (repeticiones) que se pueden realizar para alcanzar la incertidumbre "objetivo", siempre y cuando esta incertidumbre "objetivo" sea mayor a la aportación de la incertidumbre "tipo B".

1.- INTRODUCCIÓN

La realización de mediciones usualmente tiene un objetivo específico: la necesidad de conocer el valor de un mensurando dentro de un intervalo aproximado de confianza (necesidad implícita o explícita).

El resultado de la medición es el mejor estimado del mensurando en conjunto con el estimado de la incertidumbre, usualmente expandido para cubrir un nivel de confianza requerido, ver fórmula 1 [1],

$$U(y) = k \cdot u(y) \tag{1}$$

donde,

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{n} u^2(x_i) \tag{2}$$

$U(y)$ incertidumbre expandida de y
k factor de cobertura elegido en función del nivel de confianza deseado y los grados de libertad de la estimación
$u(y)$ incertidumbre estándar combinada de y
$u(x_i)$ incertidumbre estándar de la variable x_i

La fórmula 2 puede ser expresada como la combinación de la incertidumbre tipo A con la incertidumbre tipo B, ya que todas las fuentes de incertidumbre pueden ser agrupadas dentro de estos dos tipos de incertidumbre, la tipo A y la tipo B.

$$u^2(y) = u^2(A) + u^2(B) \tag{3}$$

El mejor estimador de la incertidumbre tipo A es la desviación estándar de la media (del conjunto de repeticiones), ver fórmula 4,

$$u(A) = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

y,

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{5}$$

donde,

s es la desviación estándar experimental de las repeticiones (mediciones)
n número de mediciones

La incertidumbre tipo B usualmente es comunicada al usuario como un intervalo con alguna distribución de probabilidad específica, un múltiplo de la desviación estándar (de una distribución de probabilidad normal), etc.

Por otro lado, en la fórmula 1, el factor k es usualmente tomado igual al valor de t de Student correspondiente a los grados efectivos de libertad evaluados de la medición [1].

La evaluación de los grados efectivos de libertad de la medición se realiza utilizando la fórmula de Welch-Satterthwaite [1], donde los grados de libertad de las fuentes de incertidumbre mayores son las que dominan dicha evaluación, ver fórmula 6,

$$\nu_{ef} = \frac{u^4(y)}{\sum_i^n \frac{u(x_i)^4}{\nu_i}} \qquad (6)$$

ν_{ef} grados efectivos de libertad de la estimación de la incertidumbre

ν_i grados de libertad de la estimación de la incertidumbre de la variable i

Los grados de libertad de las fuentes de incertidumbre tipo B usualmente son grandes, ya que pueden provenir de certificados de calibración, informes o intervalos con distribuciones de probabilidad asumidos mediante la experiencia del Metrólogo, pero en la incertidumbre tipo A, en la mayoría de los casos, su número de grados de libertad es considerablemente menor a los que se asumen para las fuentes de incertidumbre tipo B.

Se debe considerar que todas las fuentes de incertidumbre deben de contar con al menos un grado de libertad, lo cual significa que para la incertidumbre tipo A, se deben realizar al menos dos mediciones,

$$\nu = n - 1 \qquad (7)$$

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El metrólogo debe decidir el número de repeticiones necesarias para realizar una medición. Esta decisión impacta por un lado en la disminución de los errores aleatorios al incrementar el número de repeticiones, y por consiguiente al incrementar el número de repeticiones aumentar la inversión de tiempo en la medición. Por otro lado si se reduce el número de repeticiones en la medición, se reduce el tiempo requerido en la medición sin embargo se sacrifica el número de grados de libertad de la incertidumbre tipo A, y como consecuencia se tiene un menor conocimiento de la distribución de probabilidad de la población de la cual provienen las muestras (mediciones).

La recomendación común a los metrólogos es que se realice el mayor número de mediciones factible, sin embargo no son pocos los casos en los cuales se debe realizar el número mínimo de mediciones requeridas.

3. ESTIMACIÓN TEÓRICA

Con la finalidad de realizar una estimación del número de mediciones requeridas de manera teórica en una medición cualquiera, se plantean los siguientes tres valores de incertidumbre expandida como incertidumbre “objetivo" (en unidades cualesquiera),

$$U_{1(\approx 95{,}45\%)} = 2{,}1$$
$$U_{2(\approx 95{,}45\%)} = 2{,}3$$
$$U_{3(\approx 95{,}45\%)} = 2{,}5$$

La finalidad es estimar cual es el número de réplicas que se deben realizar para alcanzar estos valores de incertidumbre planteadas si se asume que se realizan mediciones que provienen de poblaciones con distribución de probabilidad normal de media cero y los siguientes valores de desviación estándar,

$$\sigma_1 = 0{,}2; \quad \sigma_2 = 0{,}4; \quad \sigma_3 = 0{,}6;$$
$$\sigma_4 = 0{,}8; \quad \sigma_5 = 1{,}0; \quad \sigma_6 = 1{,}2;$$
$$\sigma_7 = 1{,}4; \quad \sigma_8 = 1{,}6; \quad \sigma_9 = 1{,}8;$$
$$\sigma_{10} = 2{,}0; \quad \sigma_{11} = 2{,}2; \quad \sigma_{12} = 2{,}4;$$
$$\sigma_{13} = 2{,}6; \quad \sigma_{14} = 2{,}8; \quad \sigma_{15} = 3{,}0$$

En todos los casos se asume que la incertidumbre tipo A es estimada en función de las distribuciones mencionadas arriba y serán combinadas con una incertidumbre tipo B de valor unitario y con 1 000 grados de libertad asociados.

Como se puede ver en la fórmula 4, la incertidumbre tipo A tiende a reducirse a razón de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Para estimar el número de mediciones requeridas para cada valor de σ_i, se evalúan n valores de desviación estándar de la media (incertidumbre tipo A) utilizando la fórmula 4.

Estos valores de desviación estándar de la media se combinan, como incertidumbre tipo A, con el valor fijo de la incertidumbre tipo B para evaluar n valores de incertidumbre estándar combinada.

Posteriormente se evalúan los grados efectivos de libertad considerando los 1 000 grados de libertad de la incertidumbre tipo B y los grados de libertad correspondientes a la desviación estándar de la media considerada ($n-1$), fórmula 6.

En función de los grados efectivos de libertad resultante se selecciona el valor de la t de Student que amplia el nivel de confianza de la incertidumbre expandida a aproximadamente el 95,45%.

Para cada grupo de valores se determina cual es el número mínimo de grados de libertad con los cuales debe contar la incertidumbre tipo A para cumplir con los diferentes valores de incertidumbre "objetivo" planteados, siendo $n \geq 2$.

Con la finalidad de identificar estos valores se les identificara como provenientes del ejercicio **"teórico"**. Los resultados se presentan en la tabla 1.

4. APROXIMACIÓN

Si se asume que la incertidumbre estándar combinada tiene asociada un tipo de distribución de probabilidad normal, se podría utilizar la siguiente expresión para estimar el número de mediciones requeridas para alcanzar una incertidumbre expandida "objetivo" conociendo la incertidumbre tipo B y la desviación estándar s de la que provienen las mediciones, considerando a s como el estimado de σ, mediante la fórmula 8.

$$n = \frac{s^2}{\left(\frac{U_{(p)}}{k}\right)^2 - u_B^2} \qquad (8)$$

s es la desviación estándar de donde se podría asumir provienen las réplicas, determinado previamente durante la calibración del equipo en las condiciones de uso normal (repetibilidad), $U_{(p)}$ es la Incertidumbre expandida al nivel de confianza deseado, k es el factor de cobertura asociado al nivel de confianza deseado asumiendo un tipo de distribución normal ($k=2$, para este caso particular) y u_B^2 es la varianza de la componente tipo B de la incertidumbre. La condición $n \geq 2$ se debe mantener.

El valor puede resultar en un número no entero, por lo que se deberá redondear al valor entero próximo superior.

A este ejercicio se le identificará como ***"aproximación"***.

Los números mínimos de mediciones que se tienen que realizar para alcanzar las incertidumbres "objetivo" propuestas se presentan en la tabla 1.

		$U_{1(\approx 95,45\%)} = 2,1$		$U_{2(\approx 95,45\%)} = 2,3$		$U_{3(\approx 95,45\%)} = 2,5$	
σ	u_B	**teórico**	**aproximación**	**teórico**	**aproximación**	**teórico**	**aproximación**
0.2	1.0	2	2	2	2	2	2
0.4	1.0	2	2	2	2	2	2
0.6	1.0	4	4	2	2	2	2
0.8	1.0	7	7	3	2	2	2
1.0	1.0	11	10	4	4	3	2
1.2	1.0	15	15	6	5	4	3
1.4	1.0	20	20	7	7	5	4
1.6	1.0	26	25	9	8	6	5
1.8	1.0	33	32	11	11	7	6
2.0	1.0	41	40	14	13	9	8
2.2	1.0	49	48	16	16	10	9
2.4	1.0	58	57	19	18	12	11
2.6	1.0	68	66	22	21	13	13
2.8	1.0	79	77	26	25	15	14
3.0	1.0	91	88	29	28	17	16

Tabla 1. *Estimación del Número Mínimo de Mediciones que se deben realizar para obtener los valores de incertidumbre "objetivo" propuestos (en unidades cualquiera).*

De la tabla 1 se puede apreciar la similitud entre los resultados obtenidos del ejercicio teórico y de la aproximación, las diferencias provienen del hecho de que en el caso teórico el valor de la *t* de Student es seleccionado en función de los grados efectivos de libertad y en el ejercicio de aproximación el factor de cobertura *k* siempre es igual a dos.

5. EJEMPLO NUMÉRICO

Se desea realizar la medición de la masa de un cilindro de bronce mediante el uso de una balanza cuya resolución es de $d = 1$ mg realizando medición de lectura directa.

La incertidumbre expandida requerida es $U = 5$ mg con un factor de cobertura k = 2.

La balanza ha sido calibrada y de la cual se obtienen los siguientes valores certificados, incertidumbre asociada a la corrección $u_C =$ 0,000 5 g (k = 1) y una desviación estándar $s = 0{,}005$ g (con un número suficientemente grande de grados de libertad).

La incertidumbre debida a la corrección del empuje del aire es, $u_{emp} =$ 0,002 3 g (k=1) este valor se obtiene considerando las incertidumbres asociadas a la densidad de la pesa patrón, la densidad del material del objeto bajo prueba y la densidad del aire.

Si el modelo de medición de esta determinación de masa es el siguiente, donde L es la lectura del instrumento,

$$m_x = C + L + \varepsilon_{emp} + \varepsilon_d \qquad (9)$$

La incertidumbre tipo B, se obtiene de la combinación de las incertidumbres debidas al empuje del aire, la resolución del instrumento y a la corrección del instrumento (Calibración)

$$u_B = \sqrt{u_{emp}^2 + u_d^2 + u_C^2} = 0{,}002\,4 \text{ g}$$

sustituyendo en la fórmula 8 para estimar el número de mediciones necesarias para alcanzar la incertidumbre requerida es,

$$n = \frac{s^2}{\left(\frac{U_{(p)}}{k}\right)^2 - u_B^2} = \frac{0{,}005^2}{\left(\frac{0{,}005}{2}\right)^2 - 0{,}0024^2}$$

$$n = 51{,}02\,, \qquad n \approx 52$$

Por lo que para alcanzar la incertidumbre requerida es necesario realizar aproximadamente 52 repeticiones.

Si se logra disminuir la desviación estándar de la balanza para la medición a $s = 0{,}002$ g (p.e. cambiando la ubicación de la balanza y realizando nuevamente su calibración), y considerando que la incertidumbre tipo B no cambia debido a este movimiento, se evalúa el número de mediciones necesarias para alcanzar la incertidumbre requerida con esta nueva condición,

$$n = \frac{0{,}002^2}{\left(\frac{0{,}005}{2}\right)^2 - 0{,}0024^2}$$

$$n = 8{,}16\,, \qquad n \approx 9$$

Se estima que con 9 repeticiones es suficiente para alcanzar la incertidumbre requerida

6. DISCUSIÓN

La evaluación de los grados efectivos de libertad mediante la fórmula de Welch–Satterthwaite (W-S) ha sido analizada por Hall, Willink y Ballico en [2, 3]; en sus respectivos trabajos presentan limitaciones e inconsistencias que se generan en la evaluación de los grados efectivos de libertad en combinaciones de incertidumbres (evaluaciones de incertidumbre estándar combinada) cuando existen contribuciones dominantes con un número pequeño de grados de libertad, o cuando las contribuciones dominantes no provienen de distribuciones de probabilidad normal y a las cuales se les asigna un alto número de grados de libertad (p.e. que provienen de distribuciones de probabilidad uniforme o triangular).

Estas limitaciones de la estimación de los grados efectivos de libertad mediante W-S afecta principalmente a la validez del intervalo de confianza que se declarare en la medición, producto de la selección del factor de cobertura para expandir la incertidumbre, basado en esta estimación.

Por otro lado, en el Anexo E de la GUM [1] se menciona que la varianza de la desviación estándar experimental de la media de una muestra $s(\bar{x})$ estimado para n muestras, como el estimado de la desviación estándar de la media poblacional $\sigma(\bar{x})$, es aproximadamente,

$$\sigma^2\left[s(\bar{x})\right] \approx \frac{\sigma^2(\bar{x})}{2\nu} \qquad (10)$$

donde $\nu = n-1$ son los grados de libertad de $s(\bar{x})$.

Esta dispersión surge de las limitaciones del muestreo y puede ser muy grande, en la tabla 2 se presenta en porcentaje la razón de la desviación estándar experimental de la media sobre la desviación estándar poblacional de la media,

Numero de Observaciones n	$\sigma[s(\bar{x})] / \sigma(\bar{x})$ %
2	76
3	52
4	42
5	36
10	24
20	16
30	13
50	10

Tabla 2.- *Valores exactos (en porcentaje) para la razón* $\sigma[s(\bar{x})] / \sigma(\bar{x})$ *[1]*

Se puede apreciar que el grado de "desconocimiento" de $\sigma(\bar{x})$ es de hasta el 76 % cuando únicamente se tienen dos mediciones (un grado de libertad), lo cual dificulta realizar predicciones "acertadas" sobre intervalos de confianza en estimaciones donde intervengan fuentes con un número pequeño de grados de libertad, y principalmente cuando esta fuente de incertidumbre es dominante en la evaluación.

Por lo anteriormente mencionado se debe aclarar que la finalidad del presente trabajo no es garantizar que con el número de mediciones estimado se alcance la incertidumbre "objetivo" con el nivel de confianza deseado, pero si presentar una forma práctica de estimar el número de mediciones mínimas necesarias con las cuales se podría alcanzar la incertidumbre "objetivo", previo a la medición misma y a todo el cálculo correspondiente de la estimación de la incertidumbre de la medición.

Con la estimación del número mínimo de mediciones requeridas, se pretende por un lado economizar el tiempo invertido en la evaluación de la incertidumbre estándar combinada en donde la incertidumbre tipo B es mucho mayor que la contribución de la incertidumbre tipo A, y por otro lado, que el métrologo este conciente de que cuando la contribución de la incertidumbre tipo A es mas grande que la contribución de la incertidumbre tipo B en la evaluación de la incertidumbre estándar combinada, impacta de mayor forma la selección del número de mediciones a realizar.

7. CONCLUSIONES

Con la utilización de la fórmula 8 se puede obtener una primera aproximación al número de mediciones requeridas (repeticiones) que se pueden realizar para alcanzar la incertidumbre "objetivo" que se plantea conociendo el valor de la componente de incertidumbre tipo B así como la desviación estándar histórica del instrumento.

Una vez seleccionado el número de mediciones requeridas se debe proceder a realizar las mediciones y evaluar el mejor estimado del mensurando así como su incertidumbre asociada con los datos experimentales utilizando el método de la GUM [1] o algún otro método validado p.e. el Método de Monte Carlo (Método Numérico) [4].

REFERENCIAS

[1] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML - **Guide to the expression of Uncertainty on measurement-** Reprinted on 1995.

[2] B.D. Hall and R. Willink – **Does "Welch-Satterthwaite" make a good uncertainty estimate –**Metrologia, 2001, 38, pag. 9-15

[3] M. Ballico – **Limitations of the Welch-Satterthwaite approximation for measurement uncertainty calculations-** Metrologia, 2000, 37 pag. 61-64

[4] ISO/TC 213 N 659 – **Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM) – Supplement 1: numerical methods for the propagation of distributions -** 2004